Cocncursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
Ediția a XVIII-a
Proba pe echipe, clasele V-VI
22 noiembrie 2017

Soluții

Runda II

Problema 1.

Fie ***n*** un număr natural cu șapte cifre, care are prima cifră 3 și care are proprietatea că orice număr format cu două cifre consecutive ale lui ***n*** , în ordinea în care acestea apar în scrierea lui ***n,*** este divizibil fie cu 17, fie cu 23. Aflați numerele ***n*** cu proprietățile date, știind că ***n*** are 7 cifre.

Soluție:

Numerele care respectă cerințele problemei sunt de forma $\overline{3a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, unde
$\overline{3a_1},\ \overline{a_1a_2},\ \overline{a_2a_3},\ \overline{a_3a_4},\ \overline{a_4a_5},\ \overline{a_5a_6} \in M_{17} \cup M_{23}$.
Numerele de două cifre divizibile cu 17 sunt: 17,34,51,68,85.
Numerele de două cifre divizibile cu 23 sunt: 23,46,69,92.
Prin urmare, avem următoarele soluții posibile:
$\overline{3a_1} = 34;\ \overline{a_1a_2} = 46.$
Pentru $\overline{a_2a_3}$ avem două soluții posibile: $\overline{a_2a_3}$ =68 sau $\overline{a_2a_3}$ =69.
Astfel, obținem două soluții ***n*=3468517** sau **n=3469234.**

Problema 2.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră numerele $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)},\ T_n = S_1 \cdot S_2 \cdot .... \cdot S_n.$

Determinați numărul perechilor $(k,p), k, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{S_k}{T_p} = 2018.$

Soluție:

$$S_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

$$T_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot .... \cdot \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}.$$

$$\frac{S_k}{T_p} = \frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{1}{p+1}} = \frac{k(p+1)}{k+1} = 2018 \to k(p+1) = (k+1)\cdot 2018.$$

Cum $(k,k+1)=1 \to k \,/\, 2018$.
$2018 = 2\cdot 1009 \to 2018$ are 4 divizori deci numărul perechilor (k,p) este egal cu 4.